

سلسلة
نسائم
الرياضيات من غير تعقيد
الهندســــة
وحساب المثلثات
الثالث الإعدادي
الفصل الدراسي الأول
مدرس الرياضيات
أ. محمود عزمي
01004273395
أ.محمود عزمي
مدرس الرياضيات & Math
المنيا - ملوي
تابعوا حلقات الشرح ع اليوتيوب : رياضيات أون لاين أ. محمود عزمي

حلقات شرح مناهج المرحلة الإعدادية بالفيديو عبر قناتنا على اليوتيوب لا تفوت الفرصة اشترك الآن في القناة



YOUTUBE.COM

رياضيات اون لاين أ.محمود عزمي

شرح كامل لمناهج الرياضيات أ.محمود عزمي مؤلف سلسلة نسائم في الري...

القياس الستيني للزاوية

تعالوا نشوف كام فكرة عن النسبة

الفكرة الأولى: مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين = ٩٠°

مثال: إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٢ : ٣ أوجد قياس كل منهما.

الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى ٢س

وقياس الزاوية الثانية ٣س

٢س + ٣س = ٩٠°

٥س = ٩٠°

س = ٩٠ ÷ ٥ = ١٨°

قياس الزاوية الأولى= ٢س = ٢×١٨=٣٦°

قياس الزاوية الثانية=٣س = ٣× ١٨ =٥٤°

الفكرة الثانية: مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°

مثال: إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٤ : ٦ أوجد قياس كل منهما.

الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى ٤س

وقياس الزاوية الثانية ٦س

٤س + ٦س = ١٨٠

١٠س = ١٨٠°

س = ١٨٠ ÷ ١٠= ١٨°

قياس الزاوية الأولى= ٤س = ٤×١٨=٧٢°

قياس الزاوية الثانية=٦س = ٦× ١٨ =٥٤°

شوية ملاحظات

- الدرجة (°) = ٦٠ دقيقة (′)
- الدقيقة (′) = ٦٠ ثانية (″)
- لما يقولك أوجد بالقياس الستيني معناه أنه عاوز قياس الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني يعني بعد ماتطلع الناتج على الالة الحاسبة هتضغط مفتاح [° ′ ″]

الفكرة الثالثة: مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأي مثلث = ١٨٠°

مثال: إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث ٣ : ٧ : ٤ أوجد القياس الستيني لهم.

الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى ٣س

وقياس الزاوية الثانية ٧س

وقياس الزاوية الثالثة = ٤س

٣س + ٧س + ٤س = ١٨٠°

١٤س = ١٨٠

س = ١٨٠ ÷ ١٤ = $\frac{٩٠}{٧}$°

قياس الزاوية الأولى= ٣س = ٣× $\frac{٩٠}{٧}$

= [° ′ ″] = ١٧″ ٣٤′ ٣٨°

قياس الزاوية الثانية=٧س = ٧× $\frac{٩٠}{٧}$

= ٩٠°

قياس الزاوية الثالثة=٤س= ٤× $\frac{٩٠}{٧}$

= [° ′ ″] =٤٢″ ٢٥′ ٥١°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحاده

النسبة المثلثية لزاوية حاده: هي النسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم الذي تقع فيه هذه الزاوية الحادة.

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ (sin)

جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ (cos)

ظا جـ = $\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ (tan)

(أ: الوتر، المقابل، ب، جـ: المجاور)

مثال ١: فى الشكل المقابل أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ

(أ، ب، جـ؛ أجـ = ٥ سم (الوتر)، أب = ٤ سم، ب جـ = ٣ سم)

الحل

جا أ = $\frac{٣}{٥}$	جا جـ = $\frac{٤}{٥}$
جتا أ = $\frac{٤}{٥}$	جتا جـ = $\frac{٣}{٥}$
ظا أ = $\frac{٣}{٤}$	ظا جـ = $\frac{٤}{٣}$

لو الوتر مطلوب أربع و أجمع

لو الوتر موجود أربع و أطرح

(أ ب جـ، الوتر)

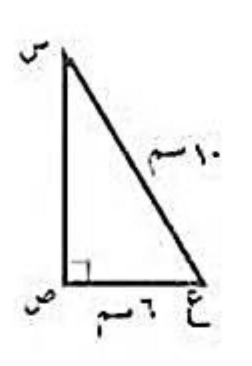
فيثاغورث

$(\text{أ جـ})^٢ = (\text{أ ب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢$

$(\text{أ ب})^٢ = (\text{أ جـ})^٢ - (\text{ب جـ})^٢$

$(\text{ب جـ})^٢ = (\text{أ جـ})^٢ - (\text{أ ب})^٢$

تدريب:



جا س = ____

جتا س = ____

ظا س = ____

جا ع = ____

جتا ع = ____

ظا ع = ____

مساعدة :

$(\text{س ص})^٢ = ١٠^٢ - ٦^٢ = ٦٤$ فيثاغورث

س ص = ٨ سم

الفكرة الأولى:

- اذا كان ق(< أ) + ق(< ب) = ٩٠° متتامتان

فإن : جا أ = جتا ب
جتا أ = جا ب

- اذا كانت س ، ص زاويتين متتامتين وكانت جا س = ٠,٧ فإن جتا ص =...

- **اختر:** في المثلث أ ب جـ القائم في ب يكون جا أ + جتا جـ = ...

٢ جا أ   ٢ جتا أ   ٢ جا جـ

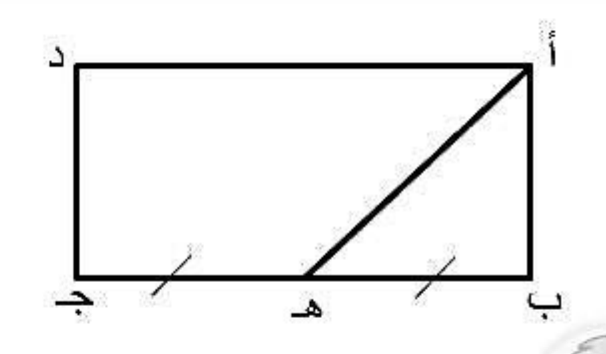
- **اختر:** في المثلث أ ب جـ القائم في ب يكون جا أ + جتا جـ = ...

٢ جتا أ   ٢ جا جـ   ٢ جتا جـ

- تدريب١: أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم
أوجد : ١. ق(< أ جـ ب)
٢. ٢ ظا (< أ جـ ب) ظا (< ب أ جـ)

- تدريب٢: أ ب جـ د شبه منحرف فيه أ د   ب جـ ، ق(< ب) = ٩٠ ، أ ب = ٣ سم
أ د = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم ،
برهن أن : جتا (< د جـ ب) – ظا (< أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

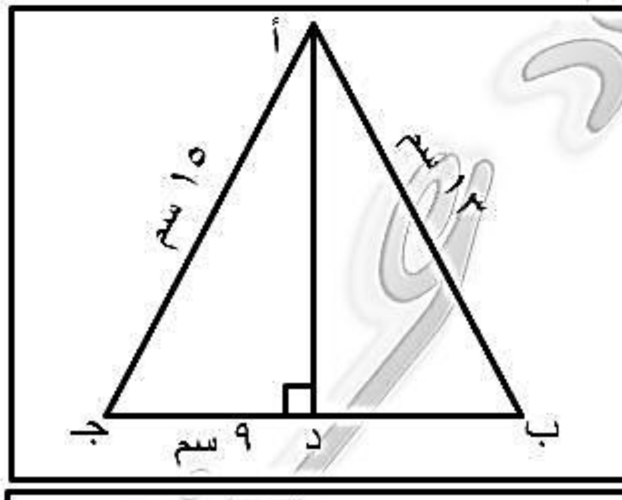
- تدريب٣: أ ب جـ د مستطيل فيه :
أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٨سم



هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

أوجد قيمة ظا(< أ هـ ب) +ظا (< أ جـ د)

- تدريب٤: في الشكل المقابل :



أوجد قيمة ظا ب

- تدريب٥: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم

$\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ يقطعه في د .
أوجد : ١. جا ب + جتا جـ   ٢. جا^{٢} جـ + جتا^{٢} جـ

- تدريب٦: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ
أوجد النسب المثلثية للزاوية جـ .

مثال ٢: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

جا أ = ٠,٦ أوجد فيه

جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

الحل

$$\text{جا أ} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٣ \text{ وحدات}}{٥ \text{ وحدات}}$$

من فيثاغورث

أ ب = ٤ وحدات

∴ جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

$$\frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} = ١$$

النسبة المثلثية للزوايا ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°

قياس الزاوية / النسب المثلثية		٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	sin	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	cos	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	tan	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

حاجات مهمة

- اذا كان جا هـ = جتا هـ
فإن ق (< هـ) = ٤٥°
- اذا كانت النسبة بين زاويتين متتامتين هي ١ : ٢ فإن قياسيهما ٣٠° ، ٦٠°
- في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = نصف طول الوتر.

أمثلة خفيفة

- اذا كان س ، ص زاويتين متتامتين بحيث س : ص = ١ : ٢ فإن
جا س + جتا ص =............
الحل : جا ٣٠° + جتا ٦٠ = ١

- ٢ جتا ٦٠ = ...
الحل ٢ × ٠,٥ = ١

- اذا كان جتا ٢س = ٠,٥ حيث س زاوية حادة فإن س = ...
الحل : ٢س = ٦٠
س = ٣٠°

- اذا كان جا ٣س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن س= ....
الحل : ٣س = ٣٠
س= ١٠°

- اذا كان جا (س+١٠) = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن س = ...
الحل : س + ١٠ = ٣٠°
س = ٢٠

- اذا كان جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حيث س زاوية حادة فإن جا س =....

الحل : $\frac{س}{٢}$ = ٣٠

س = ٦٠°
جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أمثلة متنوعة

- بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

جا^{٢} ٤٥° ظا^{٢} ٦٠° − ٢ جا^{٢} ٦٠° = صفر

الحل : $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} \times \left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - ٢ \times \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ - ٢ \times \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٣}{٢} - \frac{٣}{٢} =$ صفر

- بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

جتا ٦٠° = جتا^{٢} ٣٠° − جا^{٢} ٣٠°

الحل : الأيمن = جتا ٦٠° $= \frac{١}{٢}$

الأيسر = جتا^{٢} ٣٠° − جا^{٢} ٣٠° $= \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

$= \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} =$ الأيسر

- بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :

ظا^{٢} ٦٠° − ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥°

الحل : $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= ٣ - ٢ \times \frac{١}{٢}$

$٣ - ١ = ٢$



- <u>أوجد قيمة س اذا كان:</u>

٤س = جتا^2 ٣٠° ظا^2 ٣٠° ظا^2 ٤٥°

الحل: ٤س = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \times 1^2$

٤س = $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times 1$

٤س = $\frac{1}{4}$ .... س = $\frac{1}{16}$

- <u>أوجد قيمة س اذا كان:</u>

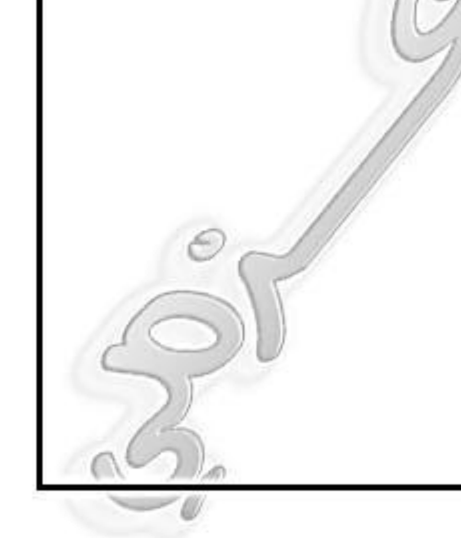
٢جا س = ظا^2 ٦٠° − ٢ ظا ٤٥° حيث س زاوية حاده

٢جا س = $(\sqrt{3})^2 - 2 \times 1$

٢جا س = ٣ − ٢

٢جا س = ١ .... جا س = $\frac{1}{2}$

س = ٣٠°



- <u>أوجد قيمة هـ اذا كان:</u>

جا^2 ٤٥° = جتا هـ ظا ٣٠° حيث هـ زاوية حادة

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ = جتا هـ × $\frac{1}{\sqrt{3}}$

جتا هـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .... هـ = ٣٠°

البعـــــد بين نقطتين

- اذا كانت أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)

فإن طول $\overline{أ ب}$

$$= \sqrt{(ص_٢ - ص_١)^٢ + (س_٢ - س_١)^٢}$$

<u>مثال ١ :</u> اذا كا ن أ (٢ ، -١) ، ب (٥ ، ٣) فإن أ ب = ... وحدة طول

الحل :

$$أ ب = \sqrt{(-١ - ٣)^٢ + (٢ - ٥)^٢}$$

$$= \sqrt{(-٤)^٢ + (-٣)^٢}$$

$$= \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$$ وحدة طول

<u>مثال ٢ :</u> اذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوي $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول أوجد قيمة س

الحل

$$\sqrt{(س - ٦)^٢ + (٥ - ١)^٢} = ٢\sqrt{٥}$$

بتربيع الطرفين: $(س - ٦)^٢ + ٤^٢ = ٢٠$

$(س - ٦)^٢ = ٢٠ - ١٦$

ناخد جذر الطرفين : $س - ٦ = \sqrt{٤}$

$س - ٦ = \pm ٢$

س= ٨ أو س = ٤

تطبيقات هندسية

<u>الفكرة الأولى:</u> تحديد نوع المثلث بالنسبة لأطوال أضلاعه .

<u>فكرة الحل:</u> نحسب أطوال أضلاع المثلث الثلاثة من قانون البعد وبعدها نحدد نوعه : **مختلف الأضلاع – متساوي الساقين – متساوي الأضلاع.**

<u>مثال:</u> اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ (١ ، -٢) ، ب (-٤ ، ٢) جـ (١ ، ٦) متساوي الساقين.

الحل :

$$أ ب = \sqrt{(١ + ٤)^٢ + (-٢ - ٢)^٢}$$

$= \sqrt{٤١}$ وحدة طول

$$ب جـ = \sqrt{(-٤ - ١)^٢ + (٢ - ٦)^٢}$$

$= \sqrt{٤١}$ وحدة طول

$$أ جـ = \sqrt{(١ - ١)^٢ + (-٢ - ٦)^٢}$$

= ٨ وحدة طول

<u>بم أن :</u> أ ب = ب جـ

<u>اذن:</u> المثلث أ ب جـ متساوي الساقين

<u>تدريب:</u>

بين نوع المثلث الذي رؤوسه أ (٣ ، ٣) ، ب (١ ، ٥) ، جـ (١ ، ٣) بالنسبة لأطوال أضلاعه

<u>ملاحظات هامة</u>

- **بعد النقطة (-٣ ، ٥) عن محور الصادات = ٣ وحدات .**
- **بعد النقطة (-٣ ، ٥) عن محور السينات = ٥ وحدات.**

الفكرة الثانية: اثبات الشكل متوازي أضلاع .

فكرة الحلـ : نحسب أطوال الأضلاع الأربعه للشكل نجد أن كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول فينتج أن الشكل متوازي أضلاع.

مثال: أ ب جـ د شكل رباعي حيث
أ (-١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥)
، جـ (٥ ، ٦) ، د (٤ ، ٢)

الحلـ :

أ ب = $\sqrt{(-١ - ٠)^{٢} + (١ - ٥)^{٢}}$
= $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(٠ - ٥)^{٢} + (٥ - ٦)^{٢}}$
= $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

جـ د = $\sqrt{(٥ - ٤)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}}$
= $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

أ د = $\sqrt{(-١ - ٤)^{٢} + (١ - ٢)^{٢}}$
= $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

بم أن : أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د
- كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول.
اذن : الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

الفكرة الثالثة: اثبات الشكل أ ب جـ د مستطيل.

فكرة الحلـ : - أولا: نثبت أن الشكل متوازي أضلاع بنفس الطريقه السابقه.
- ثانيا : نثبت أن القطران أ جـ ، ب د متساويان في الطول باستخدام قانون البعد .فينتج أن الشكل مستطيل.

الفكرة الرابعة: اثبات الشكل أ ب جـ د معين.

فكرة الحلـ : - نحسب أطوال الأضلاع الأربعة للشكل باستخدام قانون البعد.
نجد أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول فيكون الشكل معين .

الفكرة الخامسة: اثبات الشكل أ ب جـ د مربع.

فكرة الحلـ : - أولا: هنثبت أن الشكل معين بنفس الفكرة السابقة.
- ثانيا : هنثبت أن القطران أ جـ ، ب د متساويان في الطول باستخدام قانون البعد. فيكون الشكل يمثل مربع.

الفكرة السادسة: التعرف على نوع المثلث بالنسبة لقياسات زواياه.

فكرة الحلـ : - أولا: نحسب أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث بإستخدام قانون البعد.

ثانيا:اذا كان :
(أكبر ضلع)^{٢} = (الضلع)^{٢} + (الضلع)^{٢}
يكون المثلث قائم الزاوية.

- اذا كان :
(أكبر ضلع)^{٢} $>$ (الضلع)^{٢} + (الضلع)^{٢}
يكون المثلث منفرج الزاوية.

- اذا كان :
(أكبر ضلع)^{٢} $<$ (الضلع)^{٢} + (الضلع)^{٢}
يكون المثلث حاد الزوايا.

الفكرة السابعة: اثبات أن النقاط أ ، ب ، جـ تقع على دائرة واحدة مركزها م.

فكرة الحل :

نثبت أن أ م = ب م = جـ م = نق

مثال : اثبت أن النقاط أ(٣ ، -١) ب (-٤ ، ٦) ، جـ (٢ ، -٢) تقع على دائرة مركزها م (-١ ، ٢) ثم احسب محيط الدائرة ومساحتها

π = ٣,١٤

الحل

أ م = $\sqrt{(٣ + ١)^{٢} + (-١ - ٢)^{٢}}$

= ٥ وحدة طول

ب م = $\sqrt{(-٤ + ١)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}}$

= ٥ وحدة طول

جـ م = $\sqrt{(٢ + ١)^{٢} + (-٢ - ٢)^{٢}}$

= ٥ وحدة طول

اذن أ م = ب م = جـ م = ٥ = نق

محيط الدائرة = ٢ π نق

= ٢ × ٥ × ٣,١٤ = ٣١,٤ وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

= ٣,١٤ × ٥ × ٥

= ٧٨,٥ وحدة مربعة

الفكرة الثامنة: اثبات أن النقاط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة.

فكرة الحل :- نحسب أطوال أ ب ، ب جـ ، أ جـ .

اذا كان مجموع أصغر جزأين يساوي الجزءالأكبر تكون النقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

تدريب: اثبات أن النقاط أ (٣ ، ٥) ، ب (٥ ، ٧)، جـ (٠ ، ٢) تقع على استقامة واحدة.

تدريب: اثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية ثم أوجد مساحته حيث أ(٣ ، ٢) ، ب (-٤ ، ١) ، جـ (٢ ، -١)

مساعدة : مساحة المثلث القائم= نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة .

ملحوظة : بعد النقطة (س ،ص) عن نقطة الأصل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

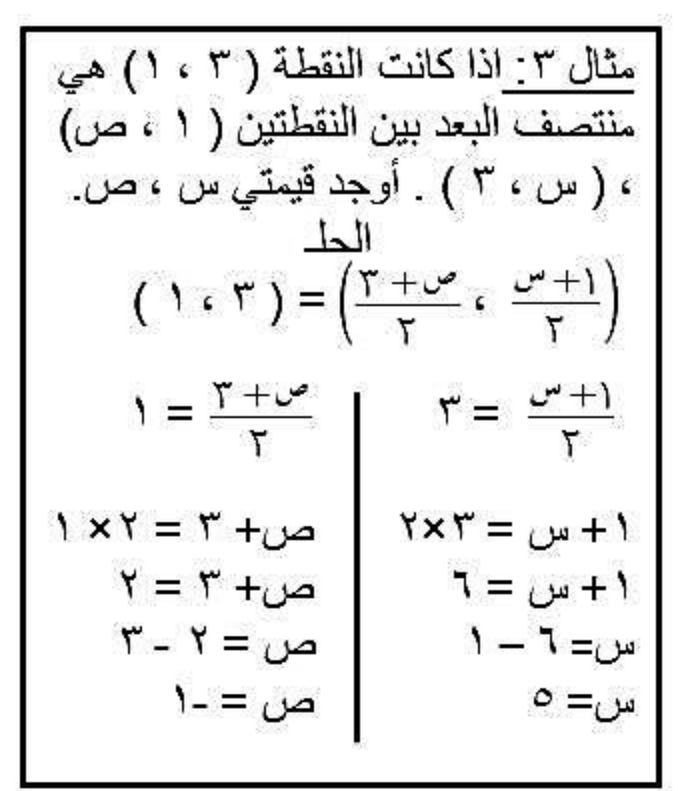
تدريب: اثبت أن النقاط أ (-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) د (٠ ، ٦) هي رؤوس مستطيل ثم أوجد مساحته .

تدريب: اثبت أن النقاط أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، -٣) ، جـ (-١ ، -٢) د (-٢، ٣) هي رؤوس معين ثم أوجد مساحته.

مساعدة: مساحة المعين = نصف حاصل ضرب طولا قطريه.

تدريب: اثبت أن النقاط أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٠) ، جـ (-٧ ، ٥) د (-٢، ٩) هي رؤوس مربع ثم أوجد مساحته.

احداثيا منتصف قطعة مستقيمة



أ ـــ جـ ـــ ب

اذا كان أ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ب ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$)

جـ تنصف $\overline{أب}$ فإن احداثيي نقطة جـ :

جـ = $\left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}\right)$

مثال١: اذا كانت أ (٣ ، ٦) ، ب (-١ ، ٢) أوجد منتصف $\overline{أب}$

الحل : المنتصف = $\left(\frac{٣-١}{٢} ، \frac{٦+٢}{٢}\right)$

= (١ ، ٤)

مثال٢: اذا كان $\overline{أب}$ قطرا في الدائرة م حيث أ (٤ ، -١) ، ب (-٢ ، ٧) أوجد احداثيي مركز الدائرة م ثم احسب محيطها .

الحل : م= $\left(\frac{٤-٢}{٢} ، \frac{-١+٧}{٢}\right)$

= (١ ، ٣)

أ م = نق

= $\sqrt{(٤-١)^{٢} + (-١-٣)^{٢}}$

= ٥ وحدة طول

المحيط =٢× ٥ × ٣,١٤

= ٣١,٤ وحدة طول

مثال ٣: اذا كانت النقطة (٣ ، ١) هي منتصف البعد بين النقطتين (١ ، ص) ، (س ، ٣) . أوجد قيمتي س ، ص.

الحل

$\left(\frac{١+س}{٢} ، \frac{ص+٣}{٢}\right)$ = (٣ ، ١)

$\frac{١+س}{٢}$ = ٣

١+ س = ٣×٢

١+ س = ٦

س= ٦ – ١

س= ٥

$\frac{ص+٣}{٢}$ = ١

ص+ ٣ = ٢ × ١

ص+ ٣ = ٢

ص = ٢ - ٣

ص = -١

أفكار هندسية

اثبات أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

فكرة الحل : نثبت أن منتصف القطر $\overline{أجـ}$ = منتصف القطر $\overline{بد}$

مثال ٤: برهن أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع حيث أ (٥ ، ٣) ب (٦ ، -٢) ، جـ (١ ، -١) ، د (٠ ، ٤)

الحل

منتصف $\overline{أجـ}$ = $\left(\frac{٥+١}{٢} ، \frac{٣-١}{٢}\right)$

= (٣ ، ١)

منتصف $\overline{بد}$ = $\left(\frac{٦+٠}{٢} ، \frac{-٢+٤}{٢}\right)$

= (٣ ، ١)

اذن : القطران ينصف كل منهما الاخر

اذن الشكل متوازي أضلاع

مثال ٥: أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ حيث أ (٣ ، ١) ب (٦ ، ٢) ، جـ (١ ، ٧) أوجد احداثيي نقطتي هـ ، د

الحل

هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = $\left(\frac{٣+١}{٢} \text{ ، } \frac{١+٧}{٢}\right)$

= (٢ ، ٤)

بفرض د = (س ، ص)

بم أن منتصف $\overline{\text{ب د}}$ = (٢ ، ٤)

$\left(\frac{٦+\text{س}}{٢} \text{ ، } \frac{٢+\text{ص}}{٢}\right)$ = (٢ ، ٤)

$\frac{٦+\text{س}}{٢} = ٢$ | $\frac{٢+\text{ص}}{٢} = ٤$

٦+ س = ٢×٢ | ٢+ ص = ٤ × ٢

٦+ س = ٤ | ٢ + ص = ٨

س = ٤ – ٦ | ص = ٨ – ٢

س = -٢ | ص = ٦

د = (-٢ ، ٦)

مثال ٦: اذا كانت النقطة جـ (٦ ، -٤) هي منتصف أ ب حيث أ (٥ ، -٣) أوجد احداثيي نقطة ب.

الحل

بفرض أن ب = (س ، ص)

$\left(\frac{٥+\text{س}}{٢} \text{ ، } \frac{-٣+\text{ص}}{٢}\right)$ = (٦ ، -٤)

$\frac{٥+\text{س}}{٢} = ٦$ | $\frac{-٣+\text{ص}}{٢} = -٤$

٥+ س =١٢ | -٣ + ص = -٨

س = ٧ | ص = -٥

ب =(٧ ، -٥)

مثال ٧: اثبت أن النقاط أ (-١ ، ٤) ب (٣ ، ١) ، جـ (-٥ ، ١) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين ثم أوجد مساحته .

الحل

أ ب = $\sqrt{(-١ - ٣)^٢ + (٤ - ١)^٢}$

= ٥ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(٣ + ٥)^٢ + (١ - ١)^٢}$

= ٨ وحدة طول

أ جـ = $\sqrt{(-١ + ٥)^٢ + (٤ - ١)^٢}$

= ٥ وحدة طول

بم أن : أ ب = أ جـ

اذن : المثلث متساوي الساقين قاعدته $\overline{\text{ب جـ}}$

(د)منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\left(\frac{٣-٥}{٢} \text{ ، } \frac{١+١}{٢}\right)$

= (-١ ، ١)

أ د (الارتفاع)

= $\sqrt{(-١ + ١)^٢ + (٤ - ١)^٢}$

= ٣ وحدة طول

مـ المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٣

= ١٢ وحدة مربعة

تدريب: أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٨) ، جـ (٩ ، ١٠) ، د (٧ ، ص) ، أوجد قيمة ص .

ميل الخط المستقيم

بدلالة < هـ — بدلالة معادلة المستقيم — بدلالة نقطتين

أولا: حساب الميل بدلالة الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (< هـ) :

الميل = ظا هـ

مثال١ : ميل المستقيم الذي يصنع مع الاجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° = ١

ثانيا: حساب الميل بدلالة معادلة المستقيم:

١ ـ المعادلة الغير مفصولة (كل المعادلة في الطرف الأيمن بينما الطرف الأيسر يساوي صفر):أس + ب ص +جـ = ٠

$$\text{الميل} = \frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

مثال٢ : المستقيم الذي معادلته

٣س = ٥ص ـ ٤ ميله = ...

الحلـ : نصفر المعادلة (نجعل الطرف الأيسر صفر)

فتكون ٣س – ٥ص + ٤ = ٠

$$\text{الميل} = \frac{-٣}{-٥} = \frac{٣}{٥}$$

٢ ـ اذا كانت المعادلة على الصورة العامه :ص= م س + جـ

الميل = معامل س

ثالثا: حساب الميل بدلالة نقطتين على المستقيم:

$$\text{الميل} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

مثال ٣ : ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -٢) ، (٥ ، ١) = ...

$$\text{الميل} = \frac{-٢-١}{٣-٥} = \frac{٣}{٢}$$

مثال ٤ : المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، -١) ، (٤ ، ٤) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ....

$$\text{الحلـ : الميل} = \frac{٤+١}{٤+١} = ١$$

ظا هـ = الميل = ١

Shift + tan ١ = ٤٥°

اذن قياس الزاوية = ٤٥°

شوية ملاحظات

- ميل المستقيم الموازي لمحور السينات (العمودي على الصادات) = صفر

أى أن البسط = صفر

- ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات (العمودي على السينات) غير معرف

أى أن المقام = صفر

الفكرة الأولى: المستقيمان المتوازيان متساويان في الميل.

مثال ٥: اذا كان المستقيمان ٦س+ك ص+ ٣=٠ ، ٣س- ص+٢=٠ متوازيين أوجد قيمة ك .

الحل: المستقيمان متوازيان.

اذن $م_١ = م_٢$

$\frac{-٦}{ك} = \frac{-٣}{-١}$

اللي متوصل بـ ك نضعه في المقام

$ك = \frac{-٦ \times -١}{-٣} = ٢$

مثال ٦: اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -١) ، (٦ ، ٣) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل: $م_١ = \frac{٣+١}{٦-٢} = ١$

$م_٢ =$ ظا ٤٥° $= ١$

∵ $م_١ = م_٢$

∴ المستقيمان متوازيان

الفكرة الثانية: المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميلاهما = -١

اذا كان: $ل_١ \perp ل_٢$

وكان $م_١ = \frac{١}{٢}$

فإن $م_٢ = -٢$

نقلب ونغير الاشارة.

مثال ٧ : أوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -٢) ، (٥ ، ١)

الحل :

ميل المستقيم الأول $= \frac{٢+١}{٥-٣} = \frac{٣}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب $= \frac{-٢}{٣}$

(نقلب ونغير الإشارة)

مثال ٨ : اذا كان المستقيم أ س – ٢ ص + ٤ = ٠ عموديا على المستقيم ٢س – ٣ص + ٧ =٠ أوجد قيمة أ .

الحل: $م_١ = \frac{-أ}{-٢} = \frac{أ}{٢}$

$م_٢ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

المستقيمان متعامدان

نقلب أحدهما ونغير الاشارة ⟵ $\frac{-٣}{٢}$



اللي متوصل بـ أ نضعه في المقام

$أ = \frac{-٣ \times ٢}{٢} = -٣$

تدريب: اذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° أوجد قيمة ك عندما يكون $ل_١$ ، $ل_٢$

١ . متوازيين ٢ . متعامدين

تطبيقات هندسية على الميل

مثال ٩ : باستخدام الميل اثبت أن المثلث الذي رؤوسه س (٣ ، ٥) ص (٤ ، ٢) ، ع (-٥ ، -١) قائم الزاوية في ص ، ثم أوجد احداثيي نقطة ل التي تجعل الشكل مستطيلا.

الحل : الفكرة : نثبت أن ضلعي القائمة $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ متعامدان باستخدام الميل .

ميل $\overline{\text{س ص}}$ = $\frac{٥-٢}{٣-٤}$ = $\frac{٣}{-١}$ = -٣

ميل $\overline{\text{ص ع}}$ = $\frac{٢+١}{٥+٤}$ = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

$م_١ \times م_٢$ = -٣ × $\frac{١}{٣}$ = -١

وعندما يكون الشكل مستطيلا يكون القطران س ع ، ص ل ينصف كل منهما الاخر.

منتصف $\overline{\text{س ع}}$ = $\left(\frac{٣-٥}{٢} ، \frac{٥-١}{٢}\right)$ = (-١ ، ٢)

وبفرض نقطة ل (أ ، ب)

منتصف $\overline{\text{ص ل}}$ = $\left(\frac{٤+أ}{٢} ، \frac{٢+ب}{٢}\right)$

$\left(\frac{٤+أ}{٢} ، \frac{٢+ب}{٢}\right)$ = (-١ ، ٢)

$\frac{٤+أ}{٢}$ = -١

٤ + أ = -٢ ← أ = -٦

$\frac{٢+ب}{٢}$ = ٢ ← ٢ + ب = ٤ ← ب = ٢

ل = (-٦ ، ٢)

مثال ١٠ : باستخدام الميل اثبت أن النقط أ(-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) جـ (٦ ، ٤) ، د (٠ ، ٦) هي رؤوس مستطيل .

الحل :

∵ ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = $\frac{١-٣}{٥+١}$ = $\frac{-١}{٣}$

ميل $\overline{\text{جـ د}}$ = $\frac{٤-٦}{٦-٠}$ = $\frac{-١}{٣}$

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متوازيان

ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\frac{١-٤}{٥-٦}$ = ٣

ميل $\overline{\text{أ د}}$ = $\frac{٦-٣}{٠+١}$ = ٣

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متوازيان

∵ كل ضلعين متقابلين متوازيين

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ × ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\frac{-١}{٣}$×٣ = -١

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$

∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل

تدريب: اذا كان المثلث الذي رؤوسه ص (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥) ، ع (-٥ ، أ) قائم الزاوية في ص . أوجد قيمة أ .

الحل : ميلا ضلعا القائمة المتعامدان

ميل $\overline{\text{س ص}}$ = -٣

متعامدان : نقلب أحدهما ونغير الاشارة $\frac{١}{٣}$

ميل $\overline{\text{ص ع}}$ = $\frac{أ-٢}{-٩}$

$\frac{أ-٢}{-٩}$ = $\frac{١}{٣}$ ...... أكمل

مثال ١١: باستخدام الميل اثبت أن النقاط أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٠ ، -١) تقع على استقامة واحدة.

الحل : ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = $\frac{٣-١}{٢-١}$ = ٢

ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٣+١}{٢-٠}$ = ٢

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ ويشتركان في ب

أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

معادلة الخط المستقيم

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

هي : ص = م س + جـ

حيث م : ميل الخط المستقيم.

جـ :الجزء المقطوع من محور الصادات.

الفكرة الأولى : ايجاد المعادلة بدلالة الميل والجزء المقطوع.

مثال ١: أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ويقطع من الاتجاه السالب لمحور الصادات جزء مقداره ٣ وحدات.

الحل : م = ٢ ، جـ = -٣

المعادله هي : ص = ٢س – ٣

مثال ٢: مستقيم ميله $\frac{٢}{٣}$ ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله وحدتان. أوجد معادلته ونقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات.

الحلـ : م = $\frac{٢}{٣}$ ، جـ = ٢

المعادلة : ص = $\frac{٢}{٣}$س + ٢

نضع ص = ٠ ⟵ $\frac{٢}{٣}$س + ٢ =٠

$\frac{٢}{٣}$ س = -٢

س = -٢ × $\frac{٣}{٢}$

س = -٣ ⟵ النقطة هي (-٣ ، ٠)

- معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، -٣) هي: ص = -٣.
- معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٢ ، ٧) هي : س = ٢ .
- معادلة المستقيم الذي ميله م ويمر بنقطة الأصل هي: ص = م س .

الفكرة الثانية : ايجاد المعادلة بدلالة الميل ونقطة واقعة على المستقيم.

فكرة الحلـ: نضع الميل في المعادلة ثم نعوض بالنقطة لإيجاد قيمة جـ .

مثال ٣: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥ .

الحل: الميل = ظا ٤٥° =١

المعادلة هي : ص = م س + جـ

بينما م = ١

ص= س + جـ

لايجاد قيمة جـ نعوض بالمعادلة عن النقطة (٣، ٢)حيث س= ٣، ص = ٢

٢ = ٣+ جـ

جـ = ٢ -٣

جـ = -١

المعادلة هي: ص = س -١

مثال ٤: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، - ٥) ويوازي المستقيم س + ٢ص -٧ = ٠

الحل: ميل المستقيم المعطى

$= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-١}{٢}$

المعادلة هي : ص = $\frac{-١}{٢}$ س + جـ

بالتعويض بالنقطة (٣ ، -٥)

-٥ = $\frac{-١}{٢}$ × ٣ + جـ

-٥ = $\frac{-٣}{٢}$ + جـ

جـ = $\frac{-٧}{٢}$

المعادلة هي : ص = $\frac{-١}{٢}$ س - $\frac{٧}{٢}$

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) وعموديا على المستقيم الذي معادلته

٥س -٢ص + ٧ = ٠

الحل: ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

$= \frac{-٥}{-٢} = \frac{٥}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب نقلب ونغير الاشارة = $\frac{-٢}{٥}$

.... أكمل الحل

الفكرة الثالثة : ايجاد المعادلة بدلالة نقطتين على المستقيم.

فكرة الحل : - نحسب الميل من القانون

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

- نعوض بنقطة من الاتنين لإيجاد قيمة جـ .

مثال ٥: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين(٤ ، ٣) ، (٠ ، ٥)

الحل

م = $\frac{٣-٥}{٤-٠} = \frac{-١}{٢}$

المعادلة : ص = $\frac{-١}{٢}$ س + جـ

بالتعويض بالنقطة (٠ ، ٥)

٥ = ٠ + جـ

جـ = ٥

المعادلة هي : ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٥

تدريب: أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحورين السيني والصادي جزءين موجبين ٤ ، ٩ وحدة طول على الترتيب.

مساعدة : المستقيم يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٩)

أكمل الحل ....

مثال ٦: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (١ ، ٣) وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين (-٣ ، ٤) ، (٣ ، -٢)

الحل :

ميل المستقيم المعطى = $\frac{٤+٢}{-٣-٣}$ = -١

ميل المستقيم المطلوب نقلب ونغير الاشارة = ١

المعادلة : ص= م س + جـ

م = ١

المعادلة : ص = س + جـ

بالتعويض بالنقطة (١ ، ٣) لإيجاد قيمة الـ جـ

٣ = ١ + جـ

جـ = ٣ – ١

جـ = ٢

المعادله هي : ص = س + ٢

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، -٣) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

أكمل : المستقيم الذي معادلته ٢س -٣ص -٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءا طوله ....

الجواب : وحدتان

مثال ٧: أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل : بضرب المعادلة × ٣

$\frac{٣}{٢}$ س + ص = ٣

ص = - $\frac{٣}{٢}$ س + ٣

الميل = - $\frac{٣}{٢}$

المستقيم يقطع من محور الصادات جزءا موجبا مقداره ٣ وحدات

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٦) ومنتصف أ ب حيث أ (١ ، -٢) ، ب (٣ ، -٤)

ذاكر....

اجتهد.....

اطلب التوفيق من الله....

أسألكم الدعاء لوالدي

بالرحمة والمغفرة

أ.محمود عزمي

ملوي المنيا

٠١٠٠٤٢٧٣٣٩٥

